УДК 519

ЗНАЧЕНИЕ КОМБИНАТОРИКИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ НАВЫКОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Стребков Е. В., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский федеральный университет, г. Казань
str9050258629@yandex.ru

Аннотация. Предлагается методика изучения комбинаторных методов для формирования навыков математического моделирования на основе построения адекватных комбинаторных моделей для реальных задач.

Ключевые слова: методика обучения, комбинаторные методы математическое моделирование.

THE SIGNIFICANCE OF COMBINATORICS FOR DEVELOPING SKILLS OF MATHEMATICAL MODELING

E.V. Strebkov, PhD, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
str9050258629@yandex.ru

Abstract. The paper suggests combinatorial principles research method for developing skills of mathematical modeling based on construction of appropriate combinatorial models for real-world problems.

Keywords: teaching method, combinatorial principles, mathematical modeling.

По многим специальностям вузов в курсе «Теория вероятностей и математическая статистика» при решении вероятностных задач требуется осознанное применение комбинаторных формул, что вызывает у студентов определенные затруднения.

Опыт преподавания позволил автору для обучения комбинаторным методам разработать методику, основанную на следующих принципах.

1. Изложение теоретического материала ведется раздельно по способам построения комбинаторных моделей. Сначала рассматривается схема случайного выбора без возвращения и, следовательно, изучаются размещения, сочетания, перестановки без повторений. Затем рассматривается схема случайного выбора с возвращением и, следовательно, изучаются размещения, сочетания, перестановки с повторениями.

2. При определении размещений и сочетаний приводятся одновременно по два варианта (по способу построения и по их основным свойствам), что позволяет всесторонне изучить рассматриваемые понятия и использовать их в предлагаемом алгоритме решения задач.

Например, размещение без повторений по k элементов из n определяется одновременно в двух вариантах.

Вариант 1 (по способу построения). В качестве упорядоченного набора по k элементов из исходного множества X, состоящего из n различных элементов.

Вариант 2 (по свойствам набора). В качестве набора по k элементов из n со следующими свойствами:

1) $k \leq n$;
2) важен порядок расположения элементов;
3) все элементы в наборе являются различными.

Алгоритм решения комбинаторных задач часто состоит из двух этапов.

Этап 1. На первом этапе необходимо построить математическую модель реальной задачи: выяснить какой набор элементов соответствует изучаемому объекту; из какого множества X этот набор элементов выбирается; по какой схеме (модели) этот набор элементов (соединение) выбирается из множества X (либо по схеме случайного выбора без возвращения, либо по схеме случайного выбора с возвращением). В результате на первом этапе получаем соединение, которое соответствует изучаемому объекту реальной задачи.

Этап 2. На втором этапе необходимо определить, исходя из условий реальной задачи, свойства полученного соединения: важен или не важен порядок расположения элементов; возможность повторения элементов или все элементы различные. В зависимости от этих свойств соединение согласно Таблице 1 относится к одному из 4 видов:

1) размещение без повторений;
2) размещение с повторениями;
3) сочетание без повторений;
4) сочетание с повторениями.

В Таблице 1 приведены также формулы для вычисления количества соединений в зависимости от вида соединения, где n - число элементов в исходном множестве X, k – длина построенного соединения, $C_n^k = n!/k!\,(n-k)!$.

Таблица 1

Свойства	Порядок важен	Порядок не важен
Все элементы различные	Размещение без повторений по k из n, их число: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	Сочетание без повторений по k из n, их число: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$
Элементы могут повторяться	Размещение с повторениями по k из n, их число: $\tilde{A}_n^k = n^k$	Сочетание с повторениями по k из n, их число: $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Применение предлагаемой методики проиллюстрируем на конкретной задаче.

Задача. Сколько существует различных вариантов доставки на 5 этажей стройки 6 ящиков различных материалов?

Решение проведём по этапам согласно изложенного алгоритма моделирования комбинаторной задачи.

Этап 1. Математической моделью данной задачи является схема случайного выбора с возвращением. Из множества этажей $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ последовательно наугад выбирается этаж и закрепляется соответственно за первым ящиком, а затем номер этажа возвращается назад во множество X, т.к. на данный этаж могут быть доставлены и другие ящики. После 6 таких извлечений этажей с возвращением получим соединение длины 6 соответствующее распределению по этажам

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$$

Этап 2. Определим вид полученного соединения (1) руководствуясь Таблицей 1. Согласно условию задачи в соединении (1) важен порядок расположения элементов (ящики являются различными) и элементы могут повторяться. Поэтому полученное соединение (1) является размещением с повторениями по 6 элементов из 5. Число таких размещений равно $\tilde{A}_5^6 = 5^6 = 15625$.

Следовательно, существует 15625 вариантов доставки 6 ящиков различных материалов по 5 этажам стройки.

Предлагаемая методика изучения комбинаторики показала свою эффективность и изложена в учебном пособии [1], в котором приведено достаточно подробное и наглядное изложение основных фактов комбинаторики, а также рассмотрены с решениями 90 комбинаторных задач, что позволяет его успешно применять при подготовке учителей математики и информатики. Учителя школ могут использовать [1] при подготовке школьников к олимпиадам по математике.

Необходимой составляющей подготовки современного учителя математики является формирование навыков математического моделирования, которое включает следующие основные этапы:

1) анализ содержания практической задачи;
2) математическую формулировку (модель) реальной задачи;
3) выбор адекватного метода и решение соответствующей математической задачи;
4) практическую интерпретацию полученного математического результата.

На этапе 1 алгоритма решения комбинаторной задачи осуществляются этапы 1) – 2) математического моделирования по анализу содержания реальной задачи и обоснованному выбору адекватной математической модели из двух возможных схем построения соединения, соответствующего рассматриваемой задаче.

На этапе 2 алгоритма решения комбинаторной задачи реализуется этап 3) математического моделирования, т.е. по свойствам полученного соединения определяется его вид и, следовательно, формула вычисления числа таких соединений.

Алгоритм математического моделирования для комбинаторных задач является достаточно наглядным и успешно осваивается учащимися. Комбинаторика применима для широких классов реальных задач, что демонстрирует прикладной характер математики и стимулирует познавательный интерес.

Для формирования навыков математического моделирования комбинаторные методы обладают следующими преимуществами:

1) не требуют дополнительных знаний по математике и иным дисциплинам;
2) теоретический материал является достаточно компактным и наглядным;
3) демонстрируют основные этапы математического моделирования;
4) позволяют рассматривать широкий класс разнообразных реальных задач.

Прикладной характер комбинаторных методов играет достаточно уникальную роль в развитии у учащихся познавательного интереса и аналитического мышления, в частности, формирование навыков математического моделирования.

Литература

1. Стребков Е. В. Комбинаторика: учебное пособие. / Е. В. Стребков, В. С. Желтухин, И. А. Бородаев. – Казань: Казан.ун-т, 2013. – 104 с.